СОВРЕМЕННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА И ЕДИНСТВО МАТЕМАТИКИ

(Заключительный обзор)

Математический анализ, четвертый семестр, 2012/13 уч. год

Лектор профессор В.А.Зорич

СОДЕРЖАНИЕ

I. Напоминания

1. Дифференциал, дифференциальная форма и общая формула Стокса.

a. *В чём было дело и что нас довело до жизни такой.*

Восхождение к современной формуле Ньютона-Лейбница мы начали ещё на первом курсе, когда, сказали, что такое *дифференциал* $df(x)$ функции $f : X \to Y$ в точке x. Постепенно разобрав это понятие детально, выяснили, что это линейная функция, действующая на линейном пространстве T_xX векторов смещения от рассматриваемой точки, со значениями в пространстве T_yY смещений от точки $y = f(x)$. Пространства $T_xX,\ \ T_yY$ были названы *касательными пространствами* к X и Y в соответствующих точках, а сам дифференциал назывался также *касательным отображением* или *производным отображением* по отношению к исходному отображению (функции) $f : X \to Y$ в точке x.

После того, как вы познакомились с понятием касательной прямой или касательной плоскости к поверхности, вы понимаете происхождение и геометрический смысл этой терминологии.

Оставляя само определение дифференциала неизменным, мы, переходя к функциям многих переменных и отображениям многомерных объектов, разумеется, каждый раз расшифровывали также координатную запись дифференциала. Так, например, появилось понятие матрицы Якоби отображения.

Мы знаем, что дифференциал функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)dx^n \ ,$$

т.е. является линейной комбинацией дифференциалов простейших функций — координат, а значение $df(x)(\xi)$ дифференциала на векторе $\xi \in T_x\mathbb{R}^n$ совпадает со значением производной $D_\xi f(x)$ функции по этому вектору и, поскольку $dx^i(\xi) = \xi^i$,

$$df(x)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\xi^1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\xi^n \ .$$

Познакомившись в алгебре с линейными и полилинейными формами, с кососимметричными формами и операцией их внешнего произведения, вы смогли, применив это к дифференциалам, написать дифференциальную форму вида

$$\omega^k(x) = a_{i_1 \dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \ ,$$

понимая, что это кососимметрическая k-форма на касательном пространстве, значение которой на наборе его векторов $\xi_1, ..., \xi_k$ вычисляется, если известно значение $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}(\xi_1, ..., \xi_k)$. Последнее, как известно из алгебры (учитывая что $dx^i(\xi) = \xi^i$), равно определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что к дифференциальным формам нас привела *формула замены переменной в кратном интеграле*. Вслед за Эйлером нас озаботило то обстоятельство, что если в одномерном интеграле сама форма $f(x)dx$, стоявшая под знаком интеграла, диктовала нам правильную формулу замены $f(\varphi(t))d\varphi(t)$, то в многомерном случае этого не было. Хотелось исправить этот недостаток и заодно понять, что же мы на самом деле интегрируем, если результат не должен зависеть от выбора системы координат.

Разбираясь в этом вопросе, нам пришлось заодно разобраться также в целом ряде понятий не только алгебры, но и геометрии. Мы поняли, что такое k-мерная поверхность, криволинейные координаты, локальная карта и атлас, что такое ориентация поверхности и как она задаётся, что такое край поверхности и индуцированная ориентация края, наконец, как всё это выглядит в общем случае многообразия размерности k.

Нам пришлось разобраться с тем, что происходит с рассматриваемыми нами объектами и операциями при изменении системы координат, как и в какую сторону переносятся точки, векторы и функции на них, в частности, формы, при гладких отображениях, и как конкретно осуществлять соответствующий перенос в координатах. Заодно мы убедились, что операция дифференцирования формы, которая в координатном представлении формы выполняется самым простым и естественным способом

$$d\omega^k(x) = da_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \ ,$$

который по этой причине часто принимается за исходное определение этой операции, на самом деле инвариантна относительно выбора системы координат.

Привлекая ещё некоторые подсказки физики (подсчёт работы, потока), мы поняли, что интегрируем дифференциальные формы, что они не только решают исходный вопрос о формуле замены в кратном интеграле, но и приводят к следующему далекому обобщению классической формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_{M_+^k} d\omega^{k-1} = \int_{\partial M_+^k} \omega^{k-1} \ .$$

Эту формулу, именуемую обычно *общей формулой Стокса*, с полным правом можно было бы именовать формулой Ньютона-Лейбница-Гаусса-Остроградского-Грина-Максвелла-Картана-Пуанкаре.

b. *Задача о первообразной вчера и сегодня.*

Одним из самых первых вопросов классического математического анализа был вопрос об обращении операции дифференцирования, точнее, вопрос о том, всякая ли функция f (например, непрерывная), является чьей-то производной и если да, то как находить первообразную F данной функции. На языке форм это вопрос о том, является ли 1-форма $f(x)dx$ дифференциалом dF некоторой 0-формы — функции F.

Мы дали положительный ответ на этот вопрос, рассматривая всё на числовом промежутке. Мы даже не рассматривали какие-то иные ситуации. А задайте себе тот же вопрос, например, для функции, тождественно равной единице на окружности или для соответствующей формы $d\varphi$, и вы сразу поймете, что ответ окажется отрицательным. Нет на окружности однозначной дифференцируемой функции, производная которой была бы всюду равна единице.

Это одно из проявлений связи ответов на вопросы глобального анализа с топологией области, где вопрос ставится и решается.

Значительная часть дальнейшего текста посвящена более глубокому, хотя и очень не полному, обсуждению этой связи.

Обобщая классическую ситуацию, поставим следующий общий вопрос. *Дана дифференциальная k-форма ω^k; ищется форма ω^{k-1}, такая что $\omega^k = d\omega^{k-1}$.*

c. *Замкнутые и точные дифференциальные формы.*

Дифференциальная форма ω^k, имеющая первообразную (т.е. являющаяся дифференциалом некоторой формы ω^{k-1}: $\quad \omega^k = d\omega^{k-1}$), называется *точной формой.*

Очевидным и легко проверяемым необходимым дифференциальным условием точности формы ω^k является равенство $d\omega^k = 0$, связанное с тем, что повторное внешнее дифференцирование любой дифференциальной формы тождественно равно нулю.

Если дифференциал некоторой формы равен нулю, форму называют *замкнутой.*

Итак *замкнутость — необходимое условие точности формы.*

На лекциях мы подробно, во всех деталях и интерпретациях рассмотрели случай 1-форм. Уже там мы убедились в том, что замкнутость формы, являясь необходимым признаком точности, вообще говоря, не является достаточным, и это существенно связано с топологией области, в которой ставится и рассматривается вопрос.

В физике важную роль играют потенциальные векторные поля. При наличии в рассматриваемом пространстве скалярного произведения $\langle , \rangle$ (или иной невырожденной билинейной формы) между линейными функциями (формами) и векторными полями возникает естественное взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\omega^1_A(x)(\xi) = \langle A(x), \xi \rangle$. Кстати, когда ищут работу при перемещении в поле A вдоль некоторого пути γ, то как раз интегрируют форму ω^1_A, называемую в этой ситуации *формой работы.* Замечательная характерная особенность потенциальных векторных полей состоит в том, что работа в таких полях зависит только от начала и конца пути перехода и равна разности значений потенциала, порождающего поле. В частности, работа по замкнутому контору (по циклу) в таком поле всегда равна нулю.

На языке векторных полей дифференциальный признак потенциальности поля, как мы знаем, сводится к проверке того, что поле безвихревое (его ротор равен нулю). Мы также знаем, что безвихревое поле не всегда потенциально и это зависит от топологии области его действия. В односвязной области необходимый признак достаточен. Например, в трехмерном шаре или в шаре с выколотым центром или вырезанным шаром всякое безвихревое поле потенциально, в двумерном круге — тоже, а в круге с выколотым центром или круговом кольце уже нет. (Напомню пример: записав форму $d\varphi$ в декартовых координатах (x, y), мы взяли соответствующее ей векторное поле $(-y, x)/(x^2 + y^2)$.)

Наряду с дифференциальным признаком точности формы, «ощупывающим» форму локально, у нас был *интегральный критерий* точности 1-формы, состоявший в том, что интеграл формы по любому циклу (замкнутому пути), лежащему в рассматриваемой области, должен быть равен нулю.

Этот *интегральный критерий точности формы* справедлив по отношению к формам любой степени при правильном понимании того, что такое цикл соответствующей размерности.

Это одна из *теорем де Рама*, следствием которой, например, является значительно более ранняя теорема или *лемма Пуанкаре*, утверждающая, что в пространстве $\mathbb{R}^n$, в шаре и в любой области им гомеоморфной, любая замкнутая форма точна.

2. Многообразия, цепи и оператор границы.

а. *Циклы и границы.*

В формуле Стокса внизу стоят геометрические объекты (кривые, поверхности, многообразия и их границы — края), по которым идет интегрирование соответствующих дифференциальных форм.

Подобно оператору d дифференцирования, действующему на формах, здесь имеется граничный оператор ∂, который сопоставляет поверхности её край. Край ∂M^k многообразия M^k — тоже многообразие, но на единицу меньшей размерности. Более того, многообразие ∂M^k уже не имеет точек края, т.е. повторное применение оператора ∂ всегда даёт пустое множество. В этом отношении операторы d и ∂ похожи. Но если оператор d повышал размерность объекта на единицу, то оператор ∂ понижает размерность на единицу.

Понятиям замкнутой и точной формы здесь отвечают следующие понятия *цикла* и *границы.*

Компактная поверхность, многообразие M^k (а потом ещё скажем и цепь) размерности k называется *циклом размерности* k, если $\partial M^k = \emptyset$, т.е. если M^k не имеет точек края.

Так, сфера размерности k является циклом размерности k.

Поверхность, многообразие M^k (и цепь) размерности k называется *границей*, если у неё есть «первообразная»в том смысле, что есть такая поверхность, многообразие M^{k+1} (цепь), что $M^k = \partial M^{k+1}$.

Ясно, что если поверхность является границей какой-то компактной поверхности, то она непременно должна быть циклом. Но ситуация тут такая же, как с формами, — это условие необходимое, но, вообще говоря не достаточное, для того, чтобы в области, где лежит этот цикл нашлась такая поверхность, границей которой он бы был.

Возьмите, например, круговое кольцо на плоскости. Любая окружность, охватывающая дырку, является циклом, но не является границей чего-либо, лежащего в кольце. А если бы вместо кольца был круг, то ситуация бы радикально изменилась.

Рассмотрим, кстати, границу кольца и заодно напомним следующее. Оператор ∂ взятия границы — не просто какое-то теоретико-множественное преобразование. Он по атласу поверхности или многообразия создаёт атлас края, который называется *индуцированным атласом края.* При этом, если исходный атлас состоял из согласованных карт, то индуцированный атлас тоже обладает этим свойством. Значит, если многообразие было ориентировано, то его край автоматически приобретает ориентацию, которая называется *индуцированной ориентацией* или *согласованной ориентацией края.*

Если то же кольцо G, о котором мы только что говорили, ориентировано стандартным левым репером декартовых координат на плоскости, то его край, состоящий из двух окружностей γ_1, γ_2, будет ориентирован так, что внешняя окружность γ_2 обходится в положительном направлении (против часовой стрелки), а внутренняя γ_1 — в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Интеграл по такому краю сведется к разности интегралов по γ_2 и γ_1. Удобно поэтому сразу писать, что $\partial G_+ = \gamma_{2+} - \gamma_{1+}$.

Если вам надо будет, например, вычислять работу, связанную с тем, что совершается пять обходов вдоль пути γ_{2+}, потом три вдоль γ_{1+} и ещё два вдоль γ_{2-}, то вы скажете, что вам надо интегрировать по цепи $5\gamma_{2+} + 3\gamma_{1+} + 2\gamma_{2-} = 5\gamma_{2+} + 3\gamma_{1+} - 2\gamma_{2+} = 3\gamma_{2+} + 3\gamma_{1+}$. Интеграл по такой цепи, разумеется, будет соответствующей линейной комбинацией интегралов по γ_{1+}, γ_{2+}.

Это наблюдение поясняет, почему полезно рассматривать формальные линейные комбинации геометрических объектов. Их и называют *цепями.* Мы здесь всего лишь пояснили, откуда возникает понятие цепи, что это вообще такое, где и почему это бывает удобно. Мы не погружаемся в серию формальных определений, которые, с одной стороны, нам здесь в самом общем виде не нужны, а с другой стороны, их можно найти в учебнике. Подобно тому, как от обычных функций порой приходится переходить к обобщенным функциям, в геометрии от простых объектов переходят к их обобщениям, например, к сингулярным кубам, их линейным комбинациям — цепям сингулярных кубов, потом кое-где и этого оказывается мало, тогда делают следующее расширение, называемое потоком, объединяющее и формы и многообразия ...

b. *Гомологичные циклы.*

Ниже мы увидим, что порой интеграл от формы по одному циклу можно посчитать, переходя к другому, иногда значительно более простому, циклу, определённым образом связанному с исходным. Это замечательное, важное и полезное обстоятельство используется в разных разделах математики и её приложениях.

Упомянутая связь циклов состоит в следующем: их разность должна быть границей объекта, лежащего в рассматриваемой области. Про такие циклы говорят, что они *гомологичны* в этой области.

Например, два замкнутых ориентированных пути γ_{1+}, γ_{2+} в области D (или на многообразии M) гомологичны, если найдется такая ориентированная поверхность $S^2_+ \subset D$ ($S^2_+ \subset M$), что $\partial S^2_+ = \gamma_{2+} - \gamma_{1+}$.

Так, рассмотренные выше окружности γ_{1+}, γ_{2+} гомологичны в кольце G_+.

Поскольку оператор ∂ взятия границы по линейности распространяется на цепи, то, разумеется, можно так же определить и гомологию цепей.

Например, цепи γ_{2+} и $2\gamma_{2+}$ не гомологичны в кольце G_+.

Роль и применение понятия гомологии циклов в контексте интегрирования дифференциальных форм мы сейчас увидим.

II. Спаривание

1. Интеграл как билинейная функция и общая формула Стокса.

a. *Интеграл точной формы по циклу и замкнутой формы по границе.*

Введем сначала удобные обозначения.

Если $\Omega(M)$ — обозначение для всего множеств дифференциальных форм на многообразии (поверхности M), то пусть $\Omega^k(M)$ — подмножество форм степени k (т.е. k-форм), $Z^k(M)$ — его подмножество замкнутых k-форм, а $B^k(M)$ — его подмножество точных k-форм.

Аналогично, если $C(M)$ — множеств цепей на многообразии (поверхности M), то пусть $C_k(M)$ — подмножество цепей размерности k (k-цепей), $Z_k(M)$ — его подмножество циклов (k-циклов), а $B_k(M)$ — его подмножество граничных циклов (k-границ).

Итак, $\Omega(M) \supset \Omega^k(M) \supset Z^k(M) \supset B^k(M)$ и $C(M) \supset C_k(M) \supset Z_k(M) \supset B_k(M)$.

Поскольку мы сейчас не будем менять многообразие M, на котором собираемся что-то делать, то для упрощения записи, когда не возникает недоразумений, мы опускаем символ M, участвующий в приведенных выше обозначениях.

Теперь сделаем одно ключевое наблюдение.

Подсчитаем интеграл от точной формы $b^k \in B^k$ по циклу $z_k \in Z_k$ и от замкнутой формы $z^k \in Z^k$ по границе $b_k \in B_k$. Воспользовавшись формулой Стокса, находим

$$\int_{z_k} b^k = \int_{z_k} d\omega^{k-1} = \int_{\partial z_k} \omega^{k-1} = \int_{\emptyset} \omega^{k-1} = 0 \ ,$$

и

$$\int_{b_k} z^k = \int_{\partial c_{k+1}} z^k = \int_{c_{k+1}} dz^k = \int_{c_{k+1}} 0 = 0 \ .$$

b. *Интеграл от замкнутой формы по циклу и его инвариантность при определённых изменениях формы и цикла.*

Сделанное только что наблюдение ведёт к следующему важному и очень полезному заключению.

Рассмотрим теперь интеграл от замкнутой формы z^k по циклу z_k. Учитывая, что добавление к замкнутой форме z^k точной формы b^k снова дает замкнутую форму (поскольку $d(z^k + b^k) = dz^k + db^k = 0$), а добавление к циклу z_k граничного цикла b_k снова дает цикл (поскольку $\partial(z^k + b^k) = \partial z^k + \partial b^k = 0$), ссылаясь на сделанное наблюдение, можем теперь написать следующую цепочку равенств

$$\int_{z_k} z^k = \int_{z_k} (z^k + b^k) = \int_{z_k + b_k} (z^k + b^k) = \int_{[z_k]} [z^k] \ .$$

Здесь $[z^k]$ — класс форм, отличающихся от исходной формы z^k на точную форму, а $[z_k]$ — класс циклов, отличающихся от исходного цикла z_k на какой-то граничный цикл.

Итак, при вычислении интеграла от замкнутой формы z^k по циклу z_k можно позволить себе, не меняя значение интеграла, выбрать на своё усмотрение любой цикл из класса $[z_k]$ и любую форму из класса $[z^k]$.

2. Отношения эквивалентности (гомологии и когомологии).

a. *К единообразию терминологии : циклы и коциклы, границы и кограницы.*

Наряду с унификацией обозначений, удобно договориться о следующей унификации терминологии. Если элементы множеств Z_k и B_k называют *циклами* и *границами* соответственно, то элементы множеств Z^k и B^k называют *коциклами* и *кограницами* соответственно.

Таким образом, коцикл — это замкнутая дифференциальная форма, а кограница — точная форма.

b. *Гомологии и когомологии.*

Класс $[z_k]$, точнее, класс $[z_k](M)$, называется *классом гомологий цикла z_k на многообразии (поверхности) M.*

Класс $[z^k]$, точнее, класс $[z^k](M)$, называется *классом когомологий коцикла z^k на многообразии (поверхности) M.*

Если оператор ∂ взятия границы цепи называют *оператором границы*, то оператор d дифференцирования форм называют *оператором кограницы.*

Два цикла *гомологичны на многообразии* (поверхности) M, если их разность — граница цепи, лежащей в M.

Два *коцикла когомологичны на многообразии* (поверхности) M, если их разность — кограница на M (т.е. замкнутые формы когомологичны на поверхности, если их разность — точная форма на этой поверхности).

3. Спаривание классов когомологий и гомологий.

a. *Интеграл как билинейная функция.*

Интеграл $\int_{c_k} \omega^k$ от k-формы по k-цепи на каком-то многообразии M можно рассматривать как спаривание $\langle \omega^k, c_k \rangle$ объектов двух векторных пространств — линейного пространства k-форм Ω^k и линейного пространства k-цепей C_k.

Зная свойства интеграла, можно заключить, что операция $\langle \omega^k, c_k \rangle$ билинейна.

b. *Невырожденность билинейной формы спаривания (теорема де Рама).*

Рассматривая выше спаривание коцикла и цикла, мы получили важный результат, который теперь можно записать в следующем виде

$$\langle z^k, z_k \rangle = \langle [z^k], [z_k] \rangle \ .$$

Вспоминая определение классов $[z^k]$, $[z_k]$ когомологий и гомологий, можно сказать, что это элементы факторпространств $H^k := Z^k/B^k$ и $H_k := Z_k/B_k$ соответственно.

Векторные пространства H^k и H_k, полная запись которых $H^k(M)$ и $H_k(M)$, называются соответственно *пространством k-мерных когомологий многообразия M* и *пространством k-мерных гомологий многообразия M.*

Таким образом, интеграл на самом деле спаривает также классы когомологий и гомологий. Спаривание $\langle [z^k], [z_k] \rangle$, очевидно, линейно и, как впервые показал де Рам, оно *невырождено.*

(Напомним, что билинейная форма $\langle , \rangle$ называется невырожденной, если ни при каком, отличном от нуля, значении одного из аргументов форма не является тождественно нулевой относительно другого аргумента.)

c. *Интегральный критерий точности замкнутой формы.*

Из упомянутой теоремы де Рама вытекает следующий критерий точности замкнутой формы. *Замкнутая форма $z^k = \omega^k$ на многообразии (поверхности, области) M точна на M тогда и только тогда, когда интеграл этой формы по любому k-мерному циклу, лежащему в M, равен нулю.*

Действительно, если $\langle z^k, z_k \rangle = 0$ при любом цикле z_k, лежащем в M, то по теореме де Рама $[z^k] = 0$ в $H^k = Z^k/B^k$. А это и значит, что $z^k \in B^k$.

Мы подробно и во всех аспектах рассмотрели и доказали этот критерий в случае 1-форм. Теперь вы его имеете в общем виде.

В частности вы можете теперь, глядя на область или многообразие, где имеется безвихревое поле или бездивергентное векторное поле, гарантировать, что оно потенциально или, соответственно, имеет векторный потенциал (является ротором некоторого поля).

Теорему де Рама, конечно, можно использовать и по второму аргументу. Зная, например, что на каком-то многообразии все замкнутые k-формы точны, можно сказать, что на таком многообразии каждый k-цикл является граничным циклом (гомологичен нулю). Таким образом, делается определённое заключение о топологии самого многообразия.

4. Иная интерпретация гомологий и когомологий.

a. *Сопряжённость операторов d и ∂.*

В обозначениях спаривания $\langle \omega^k, c_k \rangle$ формула Стокса имеет вид

$$\langle d\omega^{k-1}, c_k \rangle = \langle \omega^{k-1}, \partial c_k \rangle \ ,$$

демонстрирующий сопряжённость операторов d и ∂.

b. *Операторы d и ∂ как отображения.*

В некоторых случаях полезна более полная символика операторов d и ∂. Например, в записи следующих последовательностей линейных отображений

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{d_{k-2}} & \Omega^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \Omega^k & \xrightarrow{d_k} & \Omega^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \ldots \\
\ldots & \xleftarrow{\partial_{k-1}} & C_{k-1} & \xleftarrow{\partial_k} & C_k & \xleftarrow{\partial_{k+1}} & C_{k+1} & \xleftarrow{\partial_{k+2}} & \ldots
\end{array}$$

Используя стандартные обозначения Ker и Im для ядра линейного отображения и образа отображения, можно, например, написать, что

$$Z^k = \operatorname{Ker} d_k, \quad Z_k = \operatorname{Ker} \partial_k, \quad B^k = \operatorname{Im} d_{k-1}, \quad B_k = \operatorname{Im} \partial_{k+1},$$

и, значит,

$$H^k = \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k-1} \quad \text{и} \quad H_k = \operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1} \ .$$

5. Комментарий.

Несколько слов в заключение. Повторю, что это всего лишь обзор, обзор в существенном, без погружения в детали. Детали изложены в учебнике, а многочисленные развития в специальной литературе, которую, конечно, легче читать, имея начальные представления о предмете.

В физике, механике часто говорят на языке векторных полей. Но вы знаете, как переводятся вопросы с языка полей на язык форм и обратно, знаете связь стандартных операторов grad, rot, div с оператором d внешнего дифференцирования форм.

В механике сплошной среды вовсю используется оператор Гамильтона ∇. Некоторая техника работы с ним представлена в учебнике. Там же найдёте ответ на вопрос, как записываются и вычисляются операторы grad, rot, div в криволинейных координатах.

Всё это, включая формулу Стокса, потом находит многочисленные применения. Посмотрите, например, вывод уравнения Эйлера механики сплошной среды или запись уравнений Максвелла теории электромагнитного поля. Я не говорю уже о внутриматематических применениях в анализе, особенно комплексном анализе, геометрии, алгебраической топологии ...